SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI FOURIER PER PER PIASTRA SOTTILE CON SORGENTE TERMICA IN MOTO UNIFORME

Luca Ghezzi

May 2000

Abstract

L'equazione del calore di Fourier è risolta analiticamente nel caso di un mezzo bidimensionale infinitamente esteso qualora la sorgente di calore sia concentrata in un punto in moto rettilineo uniforme nel piano del mezzo. In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, si generalizza quindi il risultato al caso di sorgenti estese in moto rettilineo uniforme.

1 Introduzione

Si abbia una piastra omogenea ed isotropa di spessore h. Su tale piastra sia applicata una sorgente termica puntiforme che immetta nel sistema una potenza termica pari a Q; si supponga che tale sorgente di calore si muova di moto rettilineo uniforme con velocità U sulla piastra. Si supponga che le dimensioni della piastra siano tali per cui essa possa considerarsi sottile ed infinitamente lunga, ovvero che lo spessore h sia piccolo rispetto alla lunghezza nelle altre due direzioni, da considerarsi grandi rispetto alla lunghezza necessaria affinché gli effetti provocati dalla sorgente termica si siano ridotti a valori trascurabili. L'ipotesi sulla sottigliezza della piastra è fondamentale al fine di affrontare lo studio di un problema di propagazione del calore bidimensionale e potrebbe essere eventualmente sostituita, del tutto o in parte, nel caso di un mezzo ortotropo, qualora la conducibilità termica nella direzione dello spessore fosse molto superiore a quella nelle altre due direzioni, così da poter considerare virtualmente istantanea la propagazione del calore nello spessore. Anche in tale eventualità si potrebbe allora considerare il problema come bidimensionale ed applicare di conseguenza la teoria di seguito esposta. Siano ρ la densità specifica (massa nell'unità di volume), k la conduttività e c il calore specifico del mezzo; si ponga poi

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \tag{1}$$

Il fenomeno della trasmissione del calore è retto dall'equazione di Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \tag{2}$$

ovvero, in coordinate cartesiane ortogonali,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

dove (O, x, y, z) è un sistema di riferimento solidale con la piastra (v. Figura 1), t è la variabile temporale e $T = T(x, y, z, t)$ è la distribuzione spazio-temporale di temperatura. La (2) o la (3), corredate delle opportune condizioni iniziali e al contorno, forniscono la descrizione matematica del problema.

2 Sistema di riferimento mobile

Senza perdita di generalità, si assuma che la sorgente si muova nella direzione dell'asse x. Poiché la sorgente termica si muove di moto rettilineo uniforme e considerando esauriti gli effetti delle condizioni iniziali, per un osservatore solidale con essa il fenomeno fisico osservato sarà in condizioni quasi stazionarie, ossia indipendenti dalla coordinata temporale t. Introducendo un sistema di riferimento (O', x, h, z) solidale con la sorgente termica (v. figura 1), ovvero

$$\begin{cases} \xi = x - Ut \\ \eta = y \\ \zeta = z \end{cases} \tag{4}$$

si ha, conseguentemente,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -U\frac{\partial T}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \tag{5}$$

Pertanto, sostituendo le (5) nella (3), viene meno la dipendenza dalla variabile temporale t e si ottiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \frac{U}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \tag{6}$$

La (6) ammette una soluzione del tipo

$$T = e^{-\frac{U}{2\alpha}\xi} f(\xi, \eta, \zeta) \tag{7}$$

dove f è una funzione che dipende dalla sola distanza dalla sorgente termica. Sostituendo la (7) nella (6) si ottiene, dopo semplici passaggi, la seguente equazione differenziale parziale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{U}{2\alpha}\right)^2 f = 0 \tag{8}$$

3 Sistema di riferimento cilindrico mobile

Al fine di sfruttare la simmetria cilindrica del problema conviene utilizzare un sistema di riferimento cilindrico (e mobile), ciò che può essere ottenuto mediante la seguente trasformazione di variabili (v. figura 1), in cui si è tenuto conto della trascurabilità dello spessore h della piastra:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \vartheta = \arctan \frac{\eta}{\xi} \\ \zeta \end{cases} \tag{9}$$

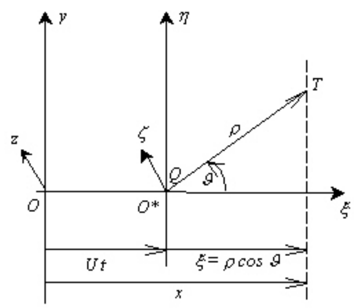

Figure 1: Sistemi di riferimento fisso e solidale con la sorgente termica

Il laplaciano di una funzione si esprime in coordinate cilindriche come di seguito:

$$\nabla^2 \circ = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\circ}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2\circ}{\partial\vartheta^2}\right) + \frac{\partial^2\circ}{\partial\zeta^2} \tag{10}$$

Ciò stante, e tenuto conto del fatto che la funzione f dipende solo dal raggio vettore ρ ma non dall'angolo ϑ nè, in virtù dell'ipotesi sulla sottigliezza della piastra (per tale motivo assimilabile a mezzo bidimensionale), dalla variabile ζ, ovvero

$$f(\rho, \vartheta, \zeta) = f(\rho) \tag{11}$$

la (8) diviene semplicemente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \left(\frac{U}{2\alpha}\right)^2 f = 0 \tag{12}$$

4 Soluzione nel caso si sorgente puntiforme

La (12) è un'equazione differenziale ordinaria, la quale ammette come soluzione una combinazione lineare delle funzioni di Bessel

$$f(\rho) = C_1 I\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) + C_2 K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) \tag{13}$$

dove I è la funzione di Bessel modificata del primo tipo, K è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo, C_1 e C_2 sono costanti da determinarsi mediante l'applicazione delle condizioni al contorno. Sostituendo la (13) nella (7) si ottiene quindi:

$$T = e^{-\frac{U}{2\alpha}\xi}\left[C_1 I\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) + C_2 K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right)\right] \tag{14}$$

Poiché, per motivi fisici, a distanza infinita dalla sorgente termica gli effetti da essa provocati sono da considerarsi nulli, si deduce che nella (14) non deve comparire la funzione di Bessel I, essendo essa divergente. Pertanto si ha

$$\lim_{\rho\to\infty} T = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0 \tag{15}$$

Ciò stante, la (14) si riduce a

$$T = e^{-\frac{U}{2\alpha}\xi} C_2 K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) \tag{16}$$

Come si mostrerà in seguito, ai fini della determinazione della seconda costante arbitraria, occorre conoscere la derivata parziale di T rispetto al raggio vettore ρ. Allo scopo, ricordando che $\xi = \rho\cos\vartheta$ e che per una generica funzione di Bessel, ed in particolare per la funzione K, vale la seguente regola di derivazione

$$\frac{\partial}{\partial u} K(v,u) = -K(v+1,u) + \frac{v}{u} K(v,u) \tag{17}$$

si ricava immediatamete

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = -C_2 \frac{U}{2\alpha} e^{-\frac{U}{2\alpha}\xi} \left[K\left(1, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) + K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right)\cos\vartheta\right] \tag{18}$$

Un semplice bilancio energetico suggerisce che il flusso di calore che attraversa un'areola cilindrica prossima alla sorgente termica (supposto costante, stante la piccolezza di tale areola, e pertanto pari al rapporto tra la potenza termica Q complessivamente immessa nel sistema e la superficie dell'areola) deve eguagliare l'opposto del prodotto della conducibilità del mezzo per il gradiente della temperatura al tendere a zero del raggio vettore ρ, ovvero

$$-k\frac{\partial T}{\partial \rho} \underset{\rho\to 0}{\cong} \frac{Q}{2\pi\rho h} \tag{19}$$

Per le funzioni di Bessel si danno i seguenti sviluppi asintotici per $u \to 0$

$$K(0,u) \underset{\rho\to 0}{\cong} -\log u \qquad K(1,u) \underset{\rho\to 0}{\cong} \frac{1}{u} \tag{20}$$

Imponendo la condizione (19) e utilizzando i suddetti sviluppi asintotici, si ottiene

$$\frac{Q}{2\pi hk} \underset{\rho\to 0}{\cong} C_2(1 - \cos\vartheta \frac{U}{2\alpha}\rho \log \frac{U}{2\alpha}\rho) \tag{21}$$

Nella precedente espressione si tenuto conto del fatto che se $\rho \to 0$ allora, per la (9), anche $\xi^2 \to 0$ e $\eta^2 \to 0$, e quindi $\xi \to 0$, ciò che porta alla scomparsa del termine esponenziale. La (21) si semplifica ulteriormente ricordando che

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{y\to -\infty} e^y y = 0 \tag{22}$$

dove il risultato segue dal fatto che la funzione esponenziale tende a 0 più rapidamente di quanto qualunque polinomio tenda ad infinito. In definitiva si ha

$$C_2 = \frac{Q}{2\pi hk} \tag{23}$$

e pertanto la (16) diviene

$$T = \frac{Q}{2\pi hk} e^{-\frac{U}{2\alpha}\xi} K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) \tag{24}$$

La (24) fornisce la distribuzione di temperatura in una piastra sottile, omogenea, isotropa, inizialmente a temperatura nulla, in seguito al passaggio di una sorgente termica puntiforme in moto rettilineo uniforme con velocità U, in condizioni quasi stazionarie. Si fa presente che lo spessore h che compare nell'equazione, per quanto arbitrario, deve essere sufficientemente piccolo rispetto alle altre due dimensioni della piastra, in modo tale da non invalidare l'ipotesi secondo la quale il fenomeno di trasmissione del calore avvenga in un mezzo bidimensionale.

5 Soluzione nel caso si sorgente estesa

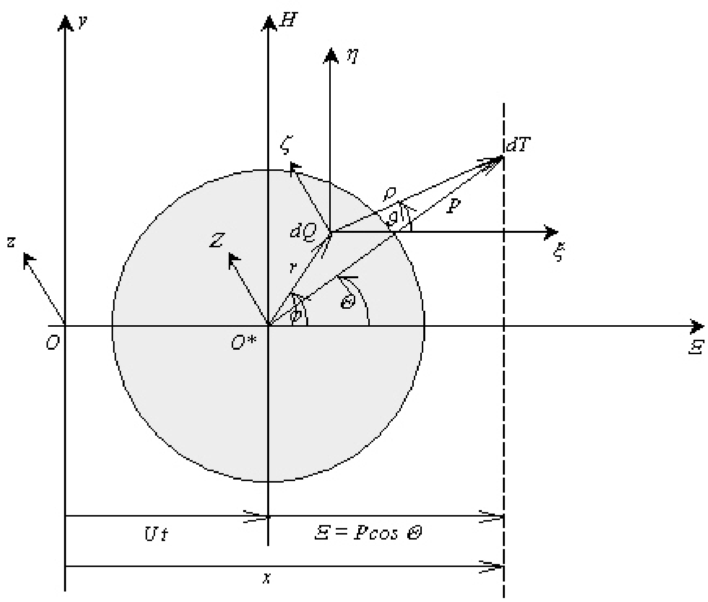

Figure 2: Sistemi di riferimento nel caso di sorgente termica distribuita su di una superficie

Nel caso in cui si abbia una sorgente termica non puntiforme bensì distribuita su di una superficie finita, si può ricavare la soluzione dell'equazione del calore dalla (24), applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, ciò che è lecito in virtù della linearità degli operatori differenziali che compaiono nella scrittura dell'equazione di Fourier. Nel caso più generico (v. figura 2) si consideri una sorgente di calore pari a $q(r, \varphi)$ agente su di un'areola infinitesima pari a $rdrd\varphi$ e posta in un punto di coordinate (r, φ):

$$dQ = q(r, \varphi)rdrd\varphi \tag{25}$$

l'effetto che tale causa produce in un punto di coordinate (P, Θ) à pari a

$$dT = \frac{q(r,\varphi)}{2\pi hk} e^{-\frac{U}{2\alpha}(P\cos\Theta - r\cos\varphi)} K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) r dr d\varphi \tag{26}$$

essendo

$$\rho = \sqrt{P^2 - 2Pr(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi) + r^2} \tag{27}$$

Nel caso in cui il flusso di calore sia assegnato su di una superficie circolare centrata nell'origine $O^\star$ del sistema di riferimento mobile di raggio P, l'effettiva distribuzione di temperatura è ottenibile integrando la (26) al variare di ρ e di ϑ in tale regione:

$$T(P,\Theta) = \frac{1}{2\pi hk} \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r,\varphi) e^{-\frac{U}{2\alpha}(P\cos\Theta - r\cos\varphi)} K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) r dr d\varphi \tag{28}$$

Se il flusso di calore è distribuito uniformemente su tutta la circonferenza in oggetto e se la potenza termica complessivamente immessa nel sistema è pari a Q, si avrà

$$q(r,\varphi) = q = \frac{Q}{\pi R^2} \tag{29}$$

da cui, per sostituzione nella (28), si ottiene infine

$$T(P,\Theta) = \frac{Q}{2\pi^2 R^2 hk} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{U}{2\alpha}(P\cos\Theta - r\cos\varphi)} K\left(0, \frac{U}{2\alpha}\rho\right) r dr d\varphi \tag{30}$$

La (30) fornisce la distribuzione di temperatura in una piastra sottile, omogenea, isotropa, inizialmente a temperatura nulla, in seguito al passaggio di una sorgente termica circolare in moto rettilineo uniforme con velocità U, in condizioni quasi stazionarie. Si fa presente che lo spessore h che compare nell'equazione, per quanto arbitrario, deve essere sufficientemente piccolo rispetto alle altre due dimensioni della piastra, in modo tale da non invalidare l'ipotesi secondo la quale il fenomeno di trasmissione del calore avvenga in un mezzo bidimensionale.