

Appendice B

Dualizzazione dell'approccio statico quale problema variazionale

B.1 La teoria dell'adattamento nel continuo

In questa tesi la teoria dell'adattamento è stata sviluppata nell'ambito delle variabili generalizzate ed è pertanto applicabile a problemi discreti. Naturalmente esistono teoremi validi nel continuo e analoghi a quelli visti. Tra i numerosissimi articoli ed i testi in cui essi possono essere ritrovati, si rimanda a *Koiter* [43], *Pycko e Maier* [76], *Polizzotto, Borino, Caddemi e Fuschi* [67].

Per brevità e per semplicità, in questa appendice si considera il solo caso di materiali elastici-perfettamente plastici (assenza di incrudimento o softening) e di leggi di scorrimento associate (coincidenza di potenziali plastici e funzioni di snervamento). La versione “continua” del teorema statico si esprime come di seguito [43]:

TEOREMA STATICO (CONDIZIONE SUFFICIENTE DI ADATTAMENTO)

Se esiste una distribuzione di sforzi residui $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ indipendente dal tempo tale per cui la somma di questi sforzi residui e degli sforzi indefinitamente elastici $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x})$ è uno stato di sforzo

interno al dominio di snervamento in ogni punto del sistema e per ogni possibile storia di carico appartenente al dominio di carico assegnato, allora si ha adattamento.

TEOREMA STATICO (CONDIZIONE NECESSARIA DI ADATTAMENTO)

Se si ha adattamento, allora esiste almeno una distribuzione di sforzi residui $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ indipendente dal tempo tale per cui la somma di questi sforzi residui e degli sforzi indefinitamente elastici $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x})$ è uno stato di sforzo non esterno al dominio di snervamento in ogni punto del sistema e per ogni possibile storia di carico appartenente al dominio di carico assegnato.

Nel continuo e nel caso di dominio di carico iperpoliedrico la definizione di ciclo ammissibile di deformazioni plastiche diviene:

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (\text{B.1})$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x}) = C \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

Nel continuo, il teorema cinematico si esprime, nella versione con eliminazione della variabile temporale e con riferimento ad un dominio di carico iperpoliedrico, come di seguito [65]:

TEOREMA CINEMATICO (CONDIZIONE SUFFICIENTE DI ADATTAMENTO)

Se esiste uno scalare $\omega > 1$, tale che, per ogni ciclo ammissibile di deformazioni plastiche, si abbia

$$\omega \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_k^{eT}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x}) d\Omega \leq \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} D(\boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x})) d\Omega \quad (\text{B.3})$$

allora il sistema è soggetto ad adattamento in corrispondenza delle condizioni di carico assegnate.

TEOREMA CINEMATICO (CONDIZIONE NECESSARIA DI ADATTAMENTO)

Se il sistema è soggetto ad adattamento in corrispondenza delle condizioni di carico assegnate, allora per ogni ciclo ammissibile di deformazioni plastiche risulta

$$\sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_k^{eT}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x}) d\Omega \leq \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} D(\boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x})) d\Omega \quad (\text{B.4})$$

La principale differenza rispetto al caso continuo è che le grandezze in gioco, ovvero sforzi e deformazioni, non sono vettori appartenenti a spazi vettoriali \mathbb{R}^n , i quali hanno dimensione finita, bensì funzioni (vettoriali) appartenenti a spazi funzionali, i quali hanno dimensione infinita. Appare naturale che gli spazi funzionali in questione siano spazi di Hilbert, così che sia possibile definire un prodotto scalare (cui si attribuisce un significato energetico). Tipicamente si ambienta il problema nello spazio $L^2(\Omega)$, il quale è hilbertiano se si definisce il seguente prodotto scalare[†]

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{B.5})$$

Dalla (B.5) è evidente che

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i \lambda_i \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}), \sum_j \mu_j \boldsymbol{\varepsilon}_j(\mathbf{x}) \right\rangle &= \\ &= \sum_i \lambda_i \left\langle \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}), \sum_j \mu_j \boldsymbol{\varepsilon}_j(\mathbf{x}) \right\rangle = \\ &= \sum_j \mu_j \left\langle \sum_i \lambda_i \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_j(\mathbf{x}) \right\rangle = \\ &= \sum_i \sum_j \mu_j \lambda_i \langle \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_j(\mathbf{x}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dai teoremi statico e cinematico si possono dedurre dei problemi di estremizzazione che permettono di ricavare il fattore di sicurezza all'inadattamento. Tuttavia, mentre nel caso discreto si ottengono dei problemi di programmazione matematica, nel continuo si ottengono

[†] La definizione esatta è in realtà la seguente (dove si è indicato con un soprassegno il complesso coniugato)

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) \overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})} d\Omega$$

la quale coincide con la (B.5), dal momento che le funzioni in gioco sono sempre reali.

problemi variazionali, ovvero ciò che deve essere minimizzato o massimizzato non è una funzione bensì un funzionale. Ponendosi nell'ambito della teoria dell'analisi convessa (ben più estesa delle nozioni introduttive di cui in App. A) è ancora possibile mostrare che l'approccio statico all'analisi di adattamento è il duale di quello cinematico, per quanto il procedimento sia molto più complesso. Lo strumento matematico necessario per la dualizzazione è la cosiddetta trasformazione di Fenchel. Di seguito si mostra un procedimento semplice grazie al quale è possibile dualizzare il problema statico ottenendo quello cinematico, dovuto a *Kamenjarzh e Merzljakov* [39] e facente uso di limitate e non particolarmente avanzate nozioni di analisi convessa.

B.2 Dualizzazione dell'approccio statico

Prima di procedere con la dualizzazione dell'approccio statico è necessaria una breve premessa di natura matematica, in cui si introduce la funzione di Minkowski di un insieme e si presentano gli spazi funzionali in cui sarà ambientata la trattazione successiva.

B.2.1 Funzione di Minkowski di un insieme

Sia dato un insieme K di uno spazio Ξ . Si definisce la funzione di Minkowski dell'insieme K come la legge che associa a ciascun punto ξ di Ξ l'estremo inferiore di tutti gli scalari ψ positivi tali per cui ξ/ψ appartiene a K , ovvero:

$$M_K(\xi) := \inf_{\psi} \{ \psi > 0 \mid \xi/\psi \in K \} \quad (\text{B.7})$$

Qualora non esista alcun $\psi > 0$ tale per cui ξ/ψ appartenga a K , si pone convenzionalmente $M_K = +\infty$. La funzione di Minkowski gode di alcune notevoli proprietà facilmente verificabili. E' innanzitutto positivamente omogenea di ordine 1, ovvero:

$$M_K(\alpha\xi) = \alpha M_K(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi, \quad \forall \alpha > 0 \quad (\text{B.8})$$

Posto $\beta := \psi/\alpha$, dalla definizione discende infatti, se α è positivo,

$$M_K(\alpha\xi) = \inf_{\psi > 0} \left\{ \psi \mid \frac{\alpha\xi}{\psi} \in K \right\} = \inf_{\beta > 0} \left\{ \alpha\beta \mid \frac{\xi}{\beta} \in K \right\} = \alpha \inf_{\beta > 0} \left\{ \beta \mid \frac{\xi}{\beta} \in K \right\} = \alpha M_K(\xi) \quad (\text{B.9})$$

Inoltre è convessa, ovvero:

$$M_K(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2) \leq \alpha M_K(\xi_1) + (1-\alpha)M_K(\xi_2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \Xi, \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad (\text{B.10})$$

La (B.10) è ovvia se $\alpha=0$ o se $\alpha=1$. Altrimenti, dal momento che l'estremo inferiore di una somma è minore o uguale della somma degli estremi inferiori e per la positiva omogeneità della funzione di Minkowski, si ha:

$$\begin{aligned} M_K(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2) &= \inf_{\psi} \left\{ \psi > 0 \mid \frac{\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2}{\psi} \in K \right\} \leq \\ &\leq \inf_{\psi} \left\{ \psi > 0 \mid \frac{\alpha\xi_1}{\psi} \in K \right\} + \inf_{\psi} \left\{ \psi > 0 \mid \frac{(1-\alpha)\xi_2}{\psi} \in K \right\} = \\ &= M_K(\alpha\xi_1) + M_K((1-\alpha)\xi_2) = \\ &= \alpha M_K(\xi_1) + (1-\alpha)M_K(\xi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Meno evidente è la seguente proprietà:

$$M_K(\xi_1 + \xi_2) \leq M_K(\xi_1) + M_K(\xi_2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \Xi \quad (\text{B.12})$$

la quale discende dalle due precedenti. Applicando prima la (B.8) e poi la (B.10) e ponendo

$$\hat{\xi}_1 := \xi_1/\alpha \quad \hat{\xi}_2 := \xi_2/(1-\alpha) \quad (\text{B.13})$$

si ha infatti:

$$\begin{aligned} M_K(\xi_1 + \xi_2) &= M_K(\alpha\hat{\xi}_1 + (1-\alpha)\hat{\xi}_2) \leq \\ &\leq \alpha M_K(\hat{\xi}_1) + (1-\alpha)M_K(\hat{\xi}_2) = \\ &= M_K(\alpha\hat{\xi}_1) + M_K((1-\alpha)\hat{\xi}_2) = \\ &= M_K(\xi_1) + M_K(\xi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Se K è un insieme chiuso per raggi, ovvero se l'appartenenza a K di un segmento avente per estremo l'origine dello spazio Ξ implica l'appartenenza a K anche dell'altro estremo:

$$\xi = \vartheta\xi_0 \in K \quad \forall \vartheta \in [0, a) \quad \Rightarrow \quad a\xi_0 \in K \quad (\text{B.15})$$

allora valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \xi \in K &\Leftrightarrow M_K(\xi) \leq 1 \\ \xi \in \partial K &\Leftrightarrow M_K(\xi) = 1 \\ \xi \in K \setminus \partial K &\Leftrightarrow M_K(\xi) < 1 \\ \xi \notin K &\Leftrightarrow M_K(\xi) > 1 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Per la (B.8) si ha allora

$$\frac{1}{\lambda}\xi \in K \quad \Leftrightarrow \quad M_K\left(\frac{1}{\lambda}\xi\right) = \frac{1}{\lambda}M_K(\xi) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad M_K(\xi) \leq \lambda \quad (\text{B.17})$$

B.2.2 Ambientazione funzionale del problema

E' utile definire preliminarmente alcuni spazi funzionali in cui si ambienterà la trattazione seguente. I campi degli sforzi e quelli delle deformazioni che possono aversi nel sistema B appartengono, rispettivamente, ad uno spazio S e ad uno spazio \mathcal{E} ; Σ è il sottospazio di S cui appartengono le distribuzioni di sforzi autoequilibrati

$$\Sigma := \{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \in S \mid C\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad N\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t\} \quad (\text{B.18})$$

Lo spazio dei campi degli spostamenti soddisfacenti condizioni al contorno omogenee (quali sono quelle considerate in questa tesi) è detto U . Lo spazio dei campi delle deformazioni congruenti con campi degli spostamenti rispettosi delle condizioni al contorno è detto E :

$$E := \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E} \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = C\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U\} \quad (\text{B.19})$$

Per il principio dei lavori virtuali, è nullo il lavoro di una qualunque distribuzione di sforzi autoequilibrata per una qualunque distribuzione di deformazioni congruente con spostamenti nulli al contorno, ovvero

$$\langle \mathbf{p}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{p}(\mathbf{x}) \in \Sigma, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \in E \quad (\text{B.20})$$

Il sottospazio dei campi di sforzo corrispondenti alle risposte indefinitamente elastiche a tutti i possibili carichi del dominio di carico Π è indicato, al solito, con Δ . Si indica con Φ il sottospazio

$$\Phi := \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in S \mid \phi(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \leq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega\} \quad (\text{B.21})$$

delle distribuzioni di sforzi quasi ovunque conformi, ovvero rispettose delle condizioni di plasticità in ogni punto del dominio spaziale occupato dal solido, con l'eventuale eccezione di un insieme di punti avente misura tridimensionale (volume) pari a zero.

Nel caso di dominio di carico iperpoliedrico risulta comodo ambientare il problema in una serie di spazi funzionali deducibili dai precedenti. Precisamente, si raccolgano in un unico vettore le distribuzioni di sforzi corrispondenti a ciascuno degli m vertici del dominio di carico:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) := [\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x})]^T \quad (\text{B.22})$$

Lo spazio cui appartengono tali vettori è il prodotto cartesiano (eseguito m volte) di S :

$$S_m := S \times S \times \dots \times S \quad (m \text{ volte}) \quad (\text{B.23})$$

Gli sforzi residui che compaiono nella teoria dell'adattamento sono indipendenti dal tempo, sono cioè i medesimi per ogni possibile condizione di carico, e quindi sono sempre gli stessi per ogni vertice del dominio di carico. Risulta allora naturale definire il seguente sottospazio

$$\Sigma_m := \left\{ \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in S_m \mid \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})]^T, \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma \right\} \quad (\text{B.24})$$

Si definisce inoltre il vettore delle risposte indefinitamente elastiche corrispondenti ai vertici del dominio di carico:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}) := [\boldsymbol{\sigma}_1^e(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\sigma}_m^e(\mathbf{x})]^T \quad (\text{B.25})$$

Procedendo come per gli sforzi, è possibile raccogliere in un vettore di m componenti (vettoriali) m campi di deformazioni e definire i seguenti spazi:

$$\mathcal{E}_m := \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E} \quad (m \text{ volte}) \quad (\text{B.26})$$

$$E_m := \left\{ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}_m \mid \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\epsilon}_m(\mathbf{x})]^T, \quad \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\epsilon}_k(\mathbf{x}) \in E \right\} \quad (\text{B.27})$$

Il significato fisico e l'utilità di E_m , per ora definito in modo formale, sarà chiaro in seguito, nella dualizzazione dell'approccio statico. Si noti comunque fin d'ora che, se $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ appartiene ad E_m , allora la somma delle sue componenti $\boldsymbol{\epsilon}_k(\mathbf{x})$ deve essere congruente, mentre nulla si dice delle singole componenti.

Dati un elemento di S_m ed uno di \mathcal{E}_m , si definisce la seguente relazione di dualità:

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m := \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}), \boldsymbol{\epsilon}_k(\mathbf{x}) \rangle \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \in S_m, \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}_m \quad (\text{B.28})$$

Si noti che, per la (B.20), risulta

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m := \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\epsilon}_k(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}), \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\epsilon}_k(\mathbf{x}) \right\rangle = 0 \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Sigma_m, \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \in E_m \quad (\text{B.29})$$

In analogia con quanto fatto sopra, si ridefinisce infine il sottospazio degli sforzi $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ rispettosi della conformità:

$$\Phi_m := \Phi \times \Phi \times \dots \times \Phi \quad (m \text{ volte}) \quad (\text{B.30})$$

B.2.3 Teorema statico dell'adattamento e problema primale

Similmente a quanto fatto nel discreto (Cap. 4), anche nel continuo, in virtù del teorema statico dell'adattamento, è possibile esprimere il fattore di sicurezza all'inadattamento come la soluzione del seguente problema variazionale:

$$s = \sup_{\mu, \hat{\rho}(\mathbf{x})} \left\{ \mu \mid \mu \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Phi \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta, \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Sigma \right\} \quad (\text{B.31})$$

Ovviamente $\mu = 0$ è un moltiplicatore ammissibile, poiché, ad esempio, una distribuzione di sforzi residui identicamente nulla (e quindi autoequilibrata) è certamente compatibile (per lo meno per ogni criterio di snervamento di pratico interesse): $\hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0} \in \Phi$. Ne consegue che s non è negativo (del resto un fattore di sicurezza negativo non avrebbe senso fisico) e la (B.31) può pertanto scriversi

$$s = \sup_{\mu, \hat{\rho}(\mathbf{x})} \left\{ \mu > 0 \mid \mu \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Phi \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta, \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Sigma \right\} \quad (\text{B.32})$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero per la linearità delle equazioni governanti il problema elastico lineare, è inoltre evidente che, moltiplicando per una costante una distribuzione di sforzi in equilibrio con carichi nulli, si ottiene ancora una distribuzione di sforzi in equilibrio con carichi nulli e che pertanto, posto

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\mu} \hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.33})$$

la (B.32) può essere riformulata equivalentemente nella forma

$$s = \sup_{\mu, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})} \left\{ \mu > 0 \mid \mu(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \in \Phi \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta, \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma \right\} \quad (\text{B.34})$$

Passando ai reciproci si può tradurre la precedente nella forma

$$\frac{1}{s} = \inf_{\mu, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})} \left\{ \frac{1}{\mu} > 0 \mid \mu(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \in \Phi \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta, \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma \right\} \quad (\text{B.35})$$

ovvero, posto $\lambda := 1/\mu$,

$$\frac{1}{s} = \inf_{\lambda, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})} \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \in \Phi \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta, \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma \right\} \quad (\text{B.36})$$

Si consideri ora la funzione di Minkowski dell'insieme Φ . Poiché in tutti i casi di interesse Φ è chiuso per raggi, per la (B.17) si ha

$$\frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \in \Phi \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \leq \lambda \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta \quad (\text{B.37})$$

Si ha poi, ovviamente,

$$M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \leq \lambda \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x})} \{M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \mid \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta\} \leq \lambda \quad (\text{B.38})$$

Definito allora il funzionale statico (che risulta essere convesso)

$$F(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) := \sup_{\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x})} \{M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \mid \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) \in \Delta\} \quad (\text{B.39})$$

la (B.36) può equivalentemente scriversi

$$\frac{1}{s} = \inf_{\lambda, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})} \{ \lambda > 0 \mid F(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \leq \lambda, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma \} \quad (\text{B.40})$$

ovvero, per il significato estremo inferiore,

$$\frac{1}{s} = \inf_{\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})} \{ F(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \mid \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma \} \quad (\text{B.41})$$

Si supponga che il dominio di carico e , conseguentemente, Δ siano iperpoliedrici. Indicati con $\boldsymbol{\sigma}_k^e(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, m$) i vertici di Δ , il funzionale statico diviene l'estremo superiore di una funzione che, in quanto convessa e definita su di un insieme iperpoliedrico, assume il massimo in corrispondenza almeno di uno dei vertici di Δ , ovvero

$$F(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) = \max_{k=1, \dots, m} \{ M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_k^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \} \quad (\text{B.42})$$

Si noti che, in seguito alla definizione della funzione di Minkowski, risulta immediatamente:

$$M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) = \max_{k=1, \dots, m} \{ M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x})) \} \quad (\text{B.43})$$

e quindi, in particolare,

$$M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})) = \max_{k=1, \dots, m} \{ M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_k^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \} \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Sigma_m \quad (\text{B.44})$$

L'espressione (B.42) può allora risciversi come

$$F_m(\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})) = M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})) \quad (\text{B.45})$$

Si è messa in evidenza la dipendenza del funzionale statico da $\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$ e, per maggiore chiarezza, si è introdotto il pedice m per indicare che si tratta di una forma modificata, benché equivalente.

Il problema variazionale (B.41) si scrive allora nella forma

$$\frac{1}{s} = \inf_{\tilde{\rho}(\mathbf{x})} \{ F_m(\tilde{\rho}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma_m \} \quad (\text{B.46})$$

Nel seguito ci si riferirà alle (B.46) e (B.45) con la denominazione di **problema primale**.

B.2.4 Dualizzazione del problema primale e teorema cinematico

Uno strumento fondamentale dell'analisi convessa è dato dalla cosiddetta trasformazione di Fenchel, la quale permette di associare ad un funzionale $f(y)$, definito in uno spazio Y , un funzionale coniugato $f^*(y')$, definito nello spazio duale[‡] Y' di Y , mediante la seguente relazione

$$f^*(y') := \sup_{y \in Y} \{ \langle y, y' \rangle - f(y) \} \quad y' \in Y' \quad (\text{B.47})$$

Si dimostra che, se f è convesso, anche f^* è convesso. Applicando la trasformazione di Fenchel al funzionale statico se ne ricava il funzionale coniugato, che sarà detto **funzionale cinematico**:

$$\begin{aligned} G_m(\tilde{\mathbf{x}}) &:= (F_m(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})))^* = \\ &= \sup_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})} \{ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{x}} \rangle_m - F_m(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \in S_m \} \quad (\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}_m) \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Dalla definizione della trasformata di Fenchel segue immediatamente la seguente diseguaglianza (diseguaglianza di Fenchel):

$$G_m(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{x}} \rangle_m - F_m(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \in S_m, \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}_m \quad (\text{B.49})$$

che può essere riscritta nella forma

$$F_m(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) \geq \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{x}} \rangle_m - G_m(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \in S_m, \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}_m \quad (\text{B.50})$$

In particolare, ricordando la (B.29), si ha:

$$F_m(\tilde{\rho}(\mathbf{x})) \geq \langle \tilde{\rho}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m - G_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) = -G_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) \quad \forall \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma_m, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \quad (\text{B.51})$$

Ricordando la (B.46) e per il significato di estremo inferiore ed estremo superiore, risulta:

$$\frac{1}{s} = \inf_{\tilde{\rho}(\mathbf{x})} \{ F_m(\tilde{\rho}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \in \Sigma_m \} \geq \sup_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \{ -G_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \} \quad (\text{B.52})$$

Si dice **problema duale** il seguente problema variazionale:

$$\frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ -G_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.53})$$

La (B.52) afferma che il problema duale fornisce, in generale, solo un limite superiore (si ricordi che si deve effettuare un'inversione) del fattore di sicurezza s , che invece può essere ricavato esattamente dal problema primale. In alcuni casi particolari è possibile migliorare il risultato espresso dalla (B.52), ottenendo un risultato "simmetrico":

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})} \left\{ F_m(\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \Sigma_m \right\} = \frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ -G_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.54})$$

La (B.54) afferma che il fattore di sicurezza può essere ricavato esattamente da entrambi i problemi primale e duale, per lo meno in alcuni casi. Ad esempio, con riferimento a continui tridimensionali, Kamenjarzh e Merzljakov hanno dimostrato la validità del passaggio dalla (B.52) alla (B.54) nel caso di dominio di snervamento limitato (nel senso che esiste un insieme, opportunamente grande ma limitato, nello spazio a sei dimensioni degli sforzi che contiene al suo interno il dominio di snervamento in ogni punto del continuo) e nel caso di dominio di snervamento cilindrico (del tipo di von Mises oppure Tresca). Per le dimostrazioni e maggiori informazioni si rimanda a [39]. Nel seguito si assumerà che il passaggio dalla (B.52) alla (B.54) sia lecito e che, pertanto, il problema duale permetta di ottenere proprio il fattore di sicurezza, anziché solo un limite superiore.

Si procede ora al calcolo della **trasformata di Fenchel del funzionale statico**, in modo che sia disponibile una espressione esplicita del funzionale cinematico. Quest'ultimo, tenuto conto della definizione (B.48) e valutando la (B.45) in $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$, è esprimibile come di seguito:

$$G_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})) = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})} \left\{ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m - M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \in S_m \right\} \quad (\text{B.55})$$

Si ponga

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.56})$$

‡ Dato uno spazio di Banach Y , si dice spazio duale Y' di Y la totalità dei funzionali lineari e continui su Y . Se Y è uno spazio di Hilbert (e quindi è pure uno spazio di Banach), allora coincide con il suo duale Y' (teorema di rappresentazione di Frechet-Riesz)

Il primo addendo a secondo membro è costituito dalle risposte indefinitamente elastiche del sistema ai carichi corrispondenti ai vertici del dominio di carico e, assegnato quest'ultimo, è pertanto da considerarsi noto ed invariabile. La (B.55) diviene allora

$$\begin{aligned}
 G_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})) &= \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})} \left\{ \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m - M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \in S_m \right\} = \\
 &= \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})} \left\{ \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m - M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \in S_m \right\} = \\
 &= \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})} \left\{ \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m - M_{\Phi_m}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})) \mid \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \in S_m \right\} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m = \\
 &= (M_{\Phi_m})^* - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_m
 \end{aligned} \tag{B.57}$$

Per esplicitare il funzionale statico occorre dunque calcolare la trasformata di Fenchel della funzione di Minkowski dell'insieme Φ_m . Si noti allo scopo che la **trasformata di Fenchel della funzione di Minkowski dell'insieme Φ** si scrive

$$M_{\Phi}^*(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & (\text{se } D(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) \leq 1) \\ +\infty & (\text{se } D(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) > 1) \end{cases} \tag{B.58}$$

essendo

$$D(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) := \sup_{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})} \left\{ \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle \mid \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \Phi \right\} \geq 0 \tag{B.59}$$

Dimostrazione

Si noti preliminarmente che si ha

$$M_{\Phi}^*(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in S} \left\{ \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \right\} \geq \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_{\Phi}(\mathbf{0}) = 0 - 0 = 0 \tag{B.60}$$

A) Si consideri dapprima il caso $D(\boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x})) > 1$. Per definizione di D ,

$$\exists \boldsymbol{\sigma}_{\diamond}(\mathbf{x}) \in \Phi \mid \langle \boldsymbol{\sigma}_{\diamond}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle > 1 \tag{B.61}$$

Poiché del resto

$$\forall \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \Phi \mid M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \leq 1 \tag{B.62}$$

si ha

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{\diamond}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle > 1 \geq M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{\diamond}(\mathbf{x})) \tag{B.63}$$

ovvero

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{\diamond}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{\diamond}(\mathbf{x})) = \omega > 0 \tag{B.64}$$

Si consideri allora $k\sigma_\diamond(\mathbf{x})$ ($k>0$); evidentemente risulta:

$$\langle k\sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_\Phi(k\sigma_\diamond(\mathbf{x})) = k \left[\langle \sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x})) \right] = k\omega \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{B.65})$$

e quindi

$$M_\Phi^*(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) = \sup_{\sigma(\mathbf{x}) \in S} \left\{ \langle \sigma(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_\Phi(\sigma(\mathbf{x})) \right\} = +\infty \quad (\text{B.66})$$

B) Si consideri ora il caso $D(\boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x})) \leq 1$. Per definizione di D ,

$$\forall \sigma(\mathbf{x}) \in \Phi \quad | \quad \langle \sigma(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle \leq 1 \quad (\text{B.67})$$

La dimostrazione procede supponendo per assurdo che

$$M_\Phi^*(\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) = \sup_{\sigma(\mathbf{x}) \in S} \left\{ \langle \sigma(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_\Phi(\sigma(\mathbf{x})) \right\} > 0 \quad (\text{B.68})$$

ciò che implica che

$$\exists \sigma_\diamond(\mathbf{x}) \in S \quad | \quad \langle \sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle - M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x})) > 0 \quad (\text{B.69})$$

ovvero

$$\langle \sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle > M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x})) \quad (\text{B.70})$$

Si mostra ora che $\sigma_\diamond(\mathbf{x})$ non può esistere, ovvero che l'ipotesi (B.68) non può sussistere. Allo scopo, si nota innanzitutto che $\sigma_\diamond(\mathbf{x})$ non può essere né esterno né interno a Φ , perché altrimenti, dividendo $\sigma_\diamond(\mathbf{x})$ per il valore della funzione di Minkowski calcolata in $\sigma_\diamond(\mathbf{x})$ stesso, si otterrebbe una distribuzione di sforzi appartenente alla frontiera di Φ e pertanto rispettosa della (B.67)

$$\frac{\sigma_\diamond(\mathbf{x})}{M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x}))} \in \partial\Phi \subset \Phi \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{\sigma_\diamond(\mathbf{x})}{M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x}))}, \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \right\rangle \leq 1 \quad (\text{B.71})$$

la quale violerebbe la (B.70):

$$1 \geq \left\langle \frac{\sigma_\diamond(\mathbf{x})}{M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x}))}, \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \right\rangle = \frac{\langle \sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle}{M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x}))} \Rightarrow \langle \sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle \leq M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x})) \quad (\text{B.72})$$

D'altra parte $\sigma_\diamond(\mathbf{x})$ non può nemmeno appartenere alla frontiera di Φ , perché altrimenti violerebbe la (B.67):

$$\sigma_\diamond(\mathbf{x}) \in \partial\Phi \quad \Rightarrow \quad M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x})) = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle \sigma_\diamond(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle \leq 1 = M_\Phi(\sigma_\diamond(\mathbf{x})) \quad (\text{B.73})$$

La dimostrazione è pertanto completa

[Q.E.D.]

Si fa osservare che, essendosi fatta l'ipotesi di normalità ed essendo convesso il dominio di snervamento (cioè l'insieme Φ), la (B.59) definisce la funzione di dissipazione plastica calcolata in corrispondenza delle deformazioni plastiche $\boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x})$, qualora si attribuisca quest'ultimo significato all'argomento di D . La non negatività di D discende dal fatto che per $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ identicamente nulla (ciò che, come già osservato, rappresenta una distribuzione di sforzi conforme) si ha $\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) \rangle = 0$. La non negatività di D può essere interpretata in senso termodinamico, alla luce del significato appena attribuito a tale funzione.

Si ponga ora

$$D_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) := \sup_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})} \left\{ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m \mid \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \in \Phi_m \right\} \quad (\text{B.74})$$

Poiché le componenti vettoriali di $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ sono tra loro indipendenti, il precedente problema variazionale si riduce alla somma di m più semplici problemi variazionali:

$$\begin{aligned} D_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) &= \sup_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})} \left\{ \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x}) \rangle \mid \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x})] \in \Phi_m \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^m \sup_{\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x})} \left\{ \langle \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x}) \rangle \mid \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) \in \Phi \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^m D(\boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Ciò premesso, si ritorni al calcolo della **trasformata di Fenchel della funzione di Minkowski dell'insieme Φ_m** : formalmente, si sostituisca Φ_m a Φ , $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ a $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})$ a $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})$ ed infine D_m a D ; data l'analogia formale delle funzioni delle funzioni di Minkowski di Φ_m e Φ , delle funzioni D_m e D , e degli insiemi Φ_m a Φ , si ha immediatamente

$$M_{\Phi_m} * (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & (\text{se } D_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) \leq 1) \\ +\infty & (\text{se } D_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) > 1) \end{cases} \quad (\text{B.76})$$

Dunque il funzionale cinematico, valutato in $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$, si scrive semplicemente

$$G_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) = \begin{cases} -\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m & (\text{se } D_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) \leq 1) \\ +\infty & (\text{se } D_m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x})) > 1) \end{cases} \quad (\text{B.77})$$

e pertanto il problema duale diviene

$$\frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\mathbf{e}}^p(\mathbf{x})} \left\{ \left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m \mid D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) \leq 1, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.78})$$

Il vincolo su D_m si deve al fatto che l'unico ramo del funzionale cinematico di effettivo interesse e di cui si deve tenere conto è quello corrispondente ai valori $D_m \leq 1$ (non concorrendo, ovviamente, $-\infty$ al calcolo del l'estremo superiore). E' importante notare che il vincolo in questione è sicuramente soddisfatto come uguaglianza in soluzione. Si ragioni infatti per assurdo e si supponga che il valore estremo sia ottenuto in corrispondenza di un valore $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x})$ tale da rispettare strettamente il vincolo ($D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x})) < 1$). Si consideri ora il valore

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\phi^p(\mathbf{x}) := \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x})}{D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}))} \quad (\text{B.79})$$

Poiché (in quanto soluzione) $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}) \in E_m$, anche $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\phi^p(\mathbf{x}) \in E_m$. Inoltre si ha $D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\phi^p(\mathbf{x})) = 1$ e risulta

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\phi^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m = \frac{\left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m}{D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}))} > \left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m \quad (\text{B.80})$$

ciò che contraddice l'ipotesi che $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x})$ sia la soluzione. Ne consegue che il problema (B.78) si può scrivere equivalentemente nella forma

$$\frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ \left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m \mid D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) = 1, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.81})$$

ovvero

$$\frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m}{D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}))} \mid D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) = 1, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.82})$$

Sia $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x})$ una soluzione del (B.82). Per ogni $k > 0$ risulta allora $D_m(k\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x})) = k$ e $k\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}) \in E_m$. Poiché

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), k\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m = k \left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_o^p(\mathbf{x}) \right\rangle_m \quad (\text{B.83})$$

il reciproco del fattore di sicurezza è la soluzione del seguente problema variazionale, equivalente al (B.82):

$$\frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m}{D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}))} \mid D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) = k, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.84})$$

Data la genericità di $k > 0$ ed essendo sempre positiva ($D_m \geq 0$ ma, essendo a denominatore, non può essere nulla), il primo dei due vincoli è superfluo ed il problema duale si esprime semplicemente nella forma

$$\frac{1}{s} = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m}{D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}))} \mid \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.85})$$

Passando ai reciproci si ottiene:

$$s = \inf_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ \frac{D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}))}{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m} \mid \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m > 0, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.86})$$

ovvero, normalizzando,

$$s = \inf_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})} \left\{ D_m(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x})) \mid \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \rangle_m = 1, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) \in E_m \right\} \quad (\text{B.87})$$

Ricordando le definizioni date in precedenza si perviene infine alla forma

$$s = \inf_{\boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x})} \left\{ \sum_{k=1}^m D(\boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x})) \mid \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{\sigma}_k^e(\mathbf{x}), \boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x}) \rangle = 1, \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x}) \in E \right\} \quad (\text{B.88})$$

la quale coincide con il **problema cinematico**, ovvero con il problema variazionale, deducibile dal teorema cinematico, la cui soluzione è il fattore di sicurezza. Se infatti si attribuisce alle funzioni $\boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x})$ il significato di deformazioni plastiche corrispondenti ai vertici del dominio di carico, si riconosce, come già osservato in precedenza, nella funzione

$$\sum_{k=1}^m D(\boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x})) \quad (\text{B.89})$$

la somma delle funzioni di dissipazione plastica, calcolate in corrispondenza dei vertici del dominio di carico, mentre il vincolo

$$\sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{\sigma}_k^e(\mathbf{x}), \boldsymbol{\epsilon}_k^p(\mathbf{x}) \rangle = 1 \quad (\text{B.90})$$

viene ad esprimere la condizione di normalizzazione del lavoro dei carichi esterni ed il vincolo

$$\sum_{k=1}^m \boldsymbol{\varepsilon}_k^p(\mathbf{x}) \in E \quad (\text{B.91})$$

viene ad esprimere la condizione di congruenza delle deformazioni plastiche cumulate.